8

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего образования

«АЛТАЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Учебный центр по ДПО ИМИТ

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по ВРиДО
__________________ Е.Н. Гончарова
« 18 » 02 ______ 2021 г.

ПРОГРАММА ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

"Профессиональное совершенствование учителя математики в теории и практике решения математических задач повышенного и высокого уровня сложности"

Барнаул 2021

Программа рассмотрена и одобрена на заседании методической комиссии ИМИТ

протокол № 5 от « 15 » 02 2024 г.,

Председатель методической комиссии института ______ / И.В. Пономарёв /

(подпись) И.О. Ф

1. Общая характеристика программы

1.1. Цель реализации программы

Реализация программы повышения квалификации направлена на совершенствование предметной компетентности учителя математики, необходимой для деятельности учителя математики в условиях повышенных требований к реализации основного общего и среднего общего образования. Расширение и углубление теоретической и практической подготовки учителей в области математики как отрасли научного знания и преподаваемой учебной дисциплины.

1.2. *Планируемые результаты обучения*

Программа составлена согласно требованиям к предметным результатам освоения обучающимися основной образовательной программы с учётом общих требований Стандарта и специфики изучаемого предмета

В результате освоения программы, направленной на реализацию концепции математического образования, удовлетворяя профессиональному стандарту, обучающийся должен:

Знать:

основы математической теории и перспективных направлений развития современной математики;

широкий спектр приложений математики и доступные обучающимся математические элементы этих приложений

основные понятия и приёмы решения практических прикладных задач.

Уметь:

организовывать последовательность шагов на уроке согласно технологии деятельностного метода**;**

решать задачи элементарной математики соответствующей ступени образования, в том числе те новые, которые возникают в ходе работы с обучающимися, задачи повышенного и высокого уровня сложности (включая новые задачи различных этапов всероссийской олимпиады);

графически представлять условия задач, решать задачи аналитическими и графическими методами, представлять геометрическую интерпретацию условий задач;

производить математическое моделирование практических комбинаторных и вероятностных ситуаций, решать смоделированную математическую задачу;

решать практические задачи с применением нестандартных приёмов исследования уравнений, неравенств, систем и с применением теории чисел.

Владеть:

основными приёмами решения заданий ОГЭ и ЕГЭ базового и профильного уровней;

основными приёмами анализа данных и графической иллюстрации заданий;

основными приёмами решения задач повышенного и высокого уровня, включая комбинаторные и вероятностные задания.

1.3. *Категория слушателей.*

К освоению ДПП допускаются действующие учителя математики и лица, имеющие или получающие высшее профессиональное образование по направлениям: «Математика», «Математика и компьютерные науки», «Математика и прикладная математика», «Прикладная математика и информатика» и другим направлениям, включающим существенную математическую подготовку.

1.4. *Трудоемкость обучения* – 72 часа.

1.5. *Форма обучения* – очно-дистанционная (с отрывом от работы).

2. Содержание программы

2.1. Учебный план программы повышения квалификации

№ п/п	Наименование разделов, (дисциплин, модулей)	Общая трудоемкость, (часов.)	Всего ауд. час.	Аудиторные занятия, час.			СРС, час.	Форма контроля
				лекции	практич., семинары	Лаборатор.		
1. Проблемы совершенствования профессиональной деятельности учителя математики в современных условиях реализации основного общего и среднего общего образования								
1.1	Ссовершенствование системно-деятельностного подхода в образовании и воспитании как основы реализации основного и среднего образования	**2**	**2**	**2**				
1.2	Проектирование урока математики или факультативного занятия в соответствии с уровневым и системно-деятельностным подходом	**2**	**2**		**2**			Проект урока по теме
2. Обучение учащихся поиску решения задач в системе школьного математического образования								
2.1	Классические теоремы элементарной геометрии и их применение в свете подготовки учащихся к ОГЭ и ЕГЭ профильного уровня по математике	**10**	**8**	**4**	**4**		**2**	Решение задач
2.2	Нестандартные приемы исследования уравнений, неравенств и систем в подготовке учащихся к ЕГЭ профильного уровня	**10**	**8**	**4**	**4**		**2**	Решение задач
2.3	Практика решения задач повышенного и высокого уровня сложности	**10**	**8**		**8**		**2**	Решение задач

2.4	Элементы комбинаторики и теории вероятностей	8	6	2	4		2	Решение задач
	3. Подготовка школьников к ГИА в системе современного математического образования							
3.1	Числовые системы как раздел подготовки школьников к ГИА	**12**	**8**	**4**	**4**		**4**	Тестирование
3.2	Классические разделы в подготовке к ОГЭ и ЕГЭ базового и профильного уровней	**12**	**8**	**4**	**4**		**4**	Решение задач
	Подготовка к итоговой аттестации	**4**					**4**	
	Итоговая аттестация	**2**	**2**		**2**			Решение индивидуального задания
	Итого	**72**	**52**	**20**	**32**		**20**	

2.2. Учебно-тематический план

№ п/п	Наименование разделов, тем	Общая трудоемкость, (часов.)	Всего ауд. час.	Аудиторные занятия, час			СРС, час.
				лекции	практич., семинары	Лаборатор.	
I	**Проблемы совершенствования профессиональной деятельности учителя математики в современных условиях реализации основного общего и среднего общего образования**						
1.1	Ссовершенствование системно-деятельностного подхода в образовании и воспитании как основы основного общего и среднего общего образования	**2**	**2**	**2**			
1.2	Проектирование урока математики или факультативного занятия в соответствии с уровневым и системно-деятельностным подходом	**2**	**2**		**2**		
II..	**Обучение учащихся поиску решения задач в системе школьного математического образования в соответствии с современными требованиями**						
2.1	**Классические теоремы элементарной геометрии и их применение в свете подготовки учащихся к ОГЭ и ЕГЭ профильного уровня по математике**	**10**	**8**	**4**	**4**		**2**
2.1.1	Геометрия треугольника. Его элементы, их соотношение		4	2	2		
2.1.2	Вписанные углы. Теоремы Птолемея, Торричелли, Эйлера		4	2	2		2
2.2	**Нестандартные приемы исследования уравнений, неравенств и систем в подготовке учащихся к ЕГЭ профильного уровня**	**10**	**8**	**4**	**4**		**2**
2.2.1	Идеи монотонности, выпуклости и экстремума, метод оценки		4	2	2		

2.2.2	Приёмы решения задач с параметрами		4	2	2		2
2.3	**Практика решения задач высокого уровня сложности**	**10**	**8**		**8**		**2**
2.3.1.	Решение заданий повышенного уровня сложности практической направленности		4		4		
2.3.2.	Решение задач высокого уровня сложности ЕГЭ		4		4		2
2.4	**Элементы комбинаторики и теории вероятностей как раздел подготовки к решению практико-ориентированных задач**	**8**	**6**	**2**	**4**		**2**
2.4.1	Основные понятия и принципы комбинаторики. Правила суммы и произведения. Формулы для числа размещений, перестановок и сочетаний.		4	2	2		2
2.4.2	Случайные события. Элементарная вероятность. Теоремы сложения.		2		2		
III	**Подготовка школьников к ГИА в системе современного математического образования**						
3.1	**Числовые системы как раздел подготовки школьников к ГИА в системе современного математического образования**	**12**	**8**	**4**	**4**		**4**
3.1.1	Теория действительных чисел и её приложения. Задачи ОГЭ и ЕГЭ по теории чисел		4	2	2		2
3.1.2	Элементы теории делимости. Остатки, простые и составные числа. Задачи ОГЭ и ЕГЭ по теории делимости		4	2	2		2
3.2	**Классические разделы математического образования в подготовке к ОГЭ и ЕГЭ базового и профильного уровней**	**12**	**8**	**4**	**4**		**4**
3.2.1	Текстовые и графические задачи ОГЭ и ЕГЭ базового уровня		4	2	2		2

3.2.2	Экстремальные задачи на конечных множествах и элементы теории графов.		4	2	2		2
	Подготовка к итоговой аттестации	4					**4**
	Итоговая аттестация	2	2		2		
	Итого:	**72**	**52**	**20**	**32**		**20**

2.3. Календарный учебный график (представляется в виде расписания занятий по форме, представленной ниже).

Данные по бюджету времени (в неделях)	Очно-дистанционная сессия	Заочная сессия	Подготовка к итоговой аттестации	Итоговая аттестация
2 недели	*2 недели*		*4 часа*	*2 часа*

2.4. Рабочая программа дисциплины "Профессиональное совершенствование учителя математики в теории и практике решения математических задач повышенного и высокого уровня сложности"

Предметно-тематическое содержание	Процессуальное (деятельностное) содержание и предметные результаты изучения
Раздел 1. Проблемы совершенствования профессиональной деятельности учителя математики в условиях реализации основного общего и среднего общего образования (4.часа)	
Тема 1.1. Ссовершенствование системно-деятельностного подхода в образовании и воспитании (2 часа)	
1.1.1. Системно-деятельностный подход в образовании. *Организация учебного процесса с максимальной степенью самостоятельной познавательной деятельностью школьника*	*Ознакомительная работа с педагогическим опытом по развитию системно-деятельностных методов. Технологии деятельностного метода*
Тема 1.2. Проектирование урока математики или факультативного занятия в соответствии с уровневым и системно-деятельностным подходом (2 часа)	*Разработка проекта урока по математике по технологии деятельностного метода*
Раздел 2. Обучение учащихся поиску решения задач в системе школьного математического образования в соответствии с современными требованиями (38 часов)	
Тема 2.1. Классические теоремы элементарной геометрии в свете подготовки учащихся к ОГЭ и ЕГЭ профильного уровня по мате-	

матике (10 часов)	
2.1.1. Геометрия треугольника. *Теоремы Чевы, Стюарта, прямая Эйлера, восстановление треугольника по его элементам.*	*Работа по восстановлению геометрических фигур*
2.1.2. Вписанные углы. Теоремы Птолемея, Торричелли, Эйлера	*Овладение геометрическим языком; развитие умения использовать его для описания предметов окружающего мира; развитие пространственных представлений, изобразительных умений, навыков геометрических построений*
Тема 2.2. Нестандартные приемы исследования уравнений, неравенств и систем в подготовке учащихся к ЕГЭ профильного уровня (10 часов)	
2.2.1. Идеи монотонности и экстремума, метод оценки. *Арифметические действия над монотонными функциями. Встречная монотонность. Метод оценки левых и правых частей уравнений и неравенств.*	*Решение типовых задач и задач повышенной сложности. Развитие умения использовать функционально-графические представления для решения различных математических задач, для описания и анализа реальных зависимостей.*
2.2.2. Приёмы решения задач с параметрами. *Построение графиков функций, зависящих от параметра. Плоскость «неизвестная – параметр», симметрия аналитических выражений, монотонность и ограниченность функций.*	*Решение типовых задач и задач повышенной сложности. Развитие умений моделирования реальных ситуаций на языке геометрии и практических задач*
Тема 2.3. Практика решения математических задач высокого уровня сложности (10 часов)	
2.3.1. Решение заданий повышенного уровня сложности	*Решение задач повышенной сложности*
Стереометрические задачи. Уравнения, неравенства и системы. Аналитические и графические способы решения.	*Умение решать уравнения, неравенства и систем; умение интерпретировать полученный результат*

2.3.2. Решение задач высокого уровня сложности	
Чётность и чередование. Анализ с конца. Подсчет двумя способами. Последовательное конструирование. Оценка + пример. Квадратный трёхчлен и теорема Виета.	*Решение задач повышенной сложности и задач высокого уровня сложности*
Тема 2.4. Изучение элементов комбинаторики и теории вероятностей как раздела подготовки к решению практико-ориентированных задач (8 часов)	
2.4.1. Основные понятия и принципы комбинаторики. *Правила суммы и произведения вычисления количества комбинаций. Формулы для числа размещений, перестановок и сочетаний.*	*Работа с понятийным аппаратом темы*
2.4.2. Случайные события и их вероятность. *Элементарная вероятность. Теоремы сложения. Независимые случайные события.*	*Формирование представлений о статистических закономерностях в реальном мире, понимание вероятностных свойств окружающих явлений при принятии решений*
Раздел 3. Подготовка школьников к ГИА в системе современного математического образования	
Тема 3.1. Числовые системы как раздел подготовки школьников к ГИА в системе современного математического образования (12 часов)	
3.1.1. Теория действительных чисел и её приложения. *Десятичное построение системы действительных чисел. Натуральные, целые, рациональные, иррациональные числа. Их десятичная запись и свойства.*	*Развитие навыков письменных инструментальных вычислений. Овладение символьным языком алгебры, приёмами выполнения тождественных преобразований выражений*

3.1.2. Элементы теории делимости. Остатки, простые и составные числа. *Признаки делимости, разложение на множители, НОД и НОК, взаимно простые числа, остатки от деления.*	*Решение задач повышенной сложности. Умение моделировать реальные ситуации на языке алгебры, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры*
Тема 3.2. Классические темы математического образования в подготовке к ОГЭ и ЕГЭ базового и профильного уровня (12 часов)	*Математическое моделирование практических задач.*
3.2.1. Текстовые и графические задачи ОГЭ и ЕГЭ базового и профильного уровня	*Развитие умений применять изученные понятия, результаты, методы для решения задач практического характера*
3.2.2. Экстремальные задачи на конечных множествах и элементы теории графов. *Задачи на максимум и минимум на конечных множествах, Понятие графа, степень вершины, чётные и нечётные вершины, подсчёт рёбер.*	*Умение решать задачи практического характера и задачи из смежных дисциплин. Решение задач высокого уровня сложности. Развитие умений моделирования реальных ситуаций, исследования модели с использованием теории графов*
Подготовка к итоговой аттестации (4 часа)	
Итоговая аттестация (2 часа)	*Индивидуальное задание*

Перечень практических (семинарских) занятий

№ темы	Наименование практических (семинарских) занятий лабораторных работ	Ауд.час.
1.2.	Проектирование урока математики или факультативного занятия в соответствии с уровневым и системно-деятельностным подходом	2
2.1.1.	Геометрия треугольника: теоремы Чевы, Стюарта, прямая Эйлера, восстановление треугольника по его элементам.	2
2.1.2.	Вписанные углы. Теоремы Птолемея, Торричелли, Эйлера	2
2.2.1.	Арифметические действия над монотонными функциями. Встречная монотонность. Метод оценки левых и правых частей уравнений и неравенств.	2
2.2.2.	Приёмы решения задач с параметрами.	2
2.3.1.	Решение заданий повышенного уровня сложности. Стереометрические задачи. Уравнения, неравенства и системы. Аналитические и графические способы решения.	4
2.3.2	Решение задач высокого уровня сложности. Чётность и чередование. Анализ с конца. Подсчет двумя способами. Последовательное конструирование. Оценка + пример	4
2.4.1	Основные понятия и принципы комбинаторики. Правила суммы и произведения. Формулы для числа размещений, перестановок и сочетаний	2
2.4.2.	Случайные события и их вероятность. Элементарная вероятность. Теоремы сложения. Независимые случайные события.	2

3.1.1.	Теория действительных чисел и её приложения. Десятичное построение системы действительных чисел. Натуральные, целые, рациональные, иррациональные числа.	2
3.1.2.	Элементы теории делимости. Остатки, простые и составные числа	2
3.2.1.	Текстовые и графические задачи ОГЭ и ЕГЭ	2
3.2.2.	Экстремальные задачи на конечных множествах и элементы теории графов.	2
	Итоговая аттестация	2

Виды самостоятельной работы слушателей (СРС)

№ п/п	Вид СРС	Трудоемкость, час.
1	Решение задач по геометрии треугольника: теоремы Чевы, Стюарта, прямая Эйлера, восстановление треугольника по его элементам.	2
2	Решение задач с параметрами.	2
3	Решение задач высокого уровня сложности. Чётность и чередование. Анализ с конца. Подсчет двумя способами. Последовательное конструирование. Оценка + пример	2
4	Решение задач. Правила суммы и произведения. Формулы для числа размещений, перестановок и сочетаний	2
5	Решение задач по теории действительных чисел и её приложениям.	2
6	Решение задач по теории делимости.	2

7	Решение текстовых и графических задач ОГЭ и ЕГЭ	2
8	Решение экстремальных задач на конечных множествах и элементы теории графов.	2
9	Подготовка к итоговой аттестации	4

3. Условия реализации программы (организационно-педагогические)

3.1. Для реализации дополнительной профессиональной программы повышения квалификации при обучении с отрывом от работы (в очно-дистанционной форме) предоставляется учебный кабинет, оборудованный доской или маркерной доской. Оборудование учебного кабинета: мультимедийная установка. Технические средства обучения: проектор, ноутбук, свободный доступ в интернет

3.2. Учебно-*методическое и информационное обеспечение программы*

Перечень рекомендуемых учебных изданий

Основная литература:

1. Александров, А.Д. Геометрия: Учебное пособие для учащихся школ и классов с углублённым изучением математики./ А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик. - М.: Просвещение,2013.
2. Виленкин, Н.Я. Алгебра для 9 класса: Учебное пособие для учащихся школ и классов с углублённым изучением математики./ Н.Я. Виленкин, Г.С. Сурвилло и др. - М.: Просвещение,2010.
3. Виленкин, Н.Я. Алгебра и математический анализ для 10 класса: Учебное пособие для учащихся школ и классов с углублённым изучением математики./ Н.Я. Виленкин, О.С. Ивашев-Мусатов, С.И. Шварцбург. - М.:Мнемозина,2006.
4. Виленкин, Н.Я. Алгебра и математический анализ для 11 класса: Учебное пособие для учащихся школ и классов с углублённым изучением математики./ Н.Я. Виленкин, О.С. Ивашев-Мусатов, С.И. Шварцбург. - М.: Просвещение,2006.
5. Лашкеева, В.Д. Решение задач с параметрами. Практикум./ В.Д. Лашкеева. – Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2003.
6. Оскорбин, Д.Н. Математические олимпиады города Барнаула 1997-2006 годов./ Д.Н. Оскорбин, А.Н. Саженков. – Барнаул: Азбука, 2007.
7. Саженков, А.Н. Классические олимпиадные темы. Части 1, 2. Практикум./ А.Н. Саженков, Т.В. Саженкова. – Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2005-6.
8. Саженков, А.Н. Математическое творчество: классические олимпиадные темы и задачи высокого уровня сложности. Практикум./ А.Н. Саженков, Т.В. Саженкова, Е.А. Плотникова. – Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2013.
9. Саженков, А.Н. Теоретические и прикладные аспекты решения задач высокого уровня сложности в системе школьного математического образования. Практикум./ А.Н. Саженков, Т.В. Саженкова. – Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2014.
10. Саженков, А.Н. Теория и практика решения олимпиадных задач по математике. Учебное пособие./ А.Н. Саженков, Т.В. Саженкова. – Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2016.
11. Саженков, А.Н. Классические олимпиадные темы и математические задачи высокого уровня сложности. Учебное пособие./ А.Н. Саженков, Д.Н. Оскорбин, Т.В. Саженкова. – Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2019

Дополнительная литература:

1. Агаханов, Н.Х. Всероссийские олимпиады школьников по математике./ Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, П.А. Кожевников, О.К. Подлипский, Д.А. Терешин. – М.: МЦНМО, 2010.
2. Агаханов, Н.Х. Математические олимпиады Московской области 1993-2002./ Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский. – М., 2003.

3. Атанасян, Л.С. Геометрия. Доп. главы к учебнику 8 класса: Учебное пособие для учащихся школ и классов с углублённым изучением математики./ Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – М.: Вита-Пресс, 2003.

4. Генкин, С.А. Ленинградские математические кружки./ С.А. Генкин, И.В. Итенберг, Д.В. Фомин. – М., 1994.

5. Каннель-Белов, А.Я. Как решают нестандартные задачи./ А.Я. Каннель-Белов, А.К. Ковальджи. – М.: МЦНМО, 1997.

6. Лашкеева, В.Д. Математика для физико-математических классов./ В.Д. Лашкеева, А.Н. Саженков. – Барнаул, 1998.

7. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. Доп. главы к школьному учебнику 8 класса: Учебное пособие для учащихся школ и классов с углублённым изучением математики./ Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк. - М.: Просвещение, 2003.

8. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. Доп. главы к школьному учебнику 9 класса: Учебное пособие для учащихся школ и классов с углублённым изучением математики./ Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк. - М.: Просвещение, 2004.

9. Шарыгин, И.Ф. Геометрия. 10-11 классы./ И.Ф. Шарыгин. – М.: Дрофа, 2007.

10. Шарыгин, И.Ф. Геометрия. Методическое пособие./ И.Ф. Шарыгин, Д.И. Шарыгин. – М.: Дрофа, 2010

4. Оценка качества освоения программы (форма аттестации, оценочные и методические материалы)

Цель текущего контроля освоения слушателями дополнительной профессиональной программы – выявить проблемы и затруднения учителей в освоении содержания программы и своевременно внести соответствующие коррективы в организацию процесса обучения.

Формы текущего контроля: индивидуальная и групповая работа слушателей, которая осуществляется с помощью реализации практических занятий, тестовых и творческих заданий.

Итоговый контроль освоения слушателями дополнительной профессиональной программы осуществляется на основе утвержденного в АлтГУ Положения «Об итоговой аттестации педагогических работников общеобразовательных учреждений, прошедших обучение по образовательным программам повышения квалификации, программ профессиональной переподготовки в ФГБОУ ВО «Алтайский государственный университет».

Цель итогового контроля – установление соответствия образовательных достижений слушателей (знаний, умений, компетентностей) требованиям к результатам обучения, предусмотренным дополнительной профессиональной программой.

Форма итогового контроля – индивидуальная, которая реализуется как решение задач итоговой аттестационной работы.

Оценка результатов освоения программы складывается из оценки, полученной по результатам текущего контроля, и оценки, полученной по результатам итогового контроля. Максимальное количество баллов, которое может получить слушатель по результатам освоения программы – 20. При этом данные результаты могут быть разнесены по трем уровням:

допустимый – 7-11 баллов;

базовый – 12-17 баллов;

инновационный – 18-20 баллов.

Таблица

Оценка результатов освоения дополнительной профессиональной программы в зависимости от типа контроля

№ п/п	Виды контроля / Количество баллов	Уровни		
		допустимый	**базовый**	**инновационный**
1	Текущий	4-6	6-9	9-10
2	Итоговый	3-5	6-8	9-10
	Всего:	**7-11**	**12-17**	**18-20**

Тестовые задания по теории чисел для текущего контроля

Преобразование числовых наборов и экстремальные значения

Вариант 1

1. Числа набора 1, 2, 3, 4 расставьте в выражение $a \cdot b - c : d$ так, чтобы разным буквам соответствовали разные числа, а значение выражения стало максимально возможным. Укажите это максимальное значение: а) 5, б) 5,75, в) 10, г) 11,5.

2. В ряд выписаны натуральные числа от 1 до 10. Какие из предлагаемых результатов невозможно получить, расставляя между этими числами знаки «+» и « – »?
а) 0, б) -1, в) 2, г) 3.

3. Произведение 10 целых чисел равно 1. Найдите наименьшую по модулю и наибольшую суммы из этих чисел: а) 0 и 10, б) 1 и 10, в) 2 и 10, г) 3 и 10.

4. Каждое из чисел 2, 3, 4, 5, 6, 7 умножают на каждое из чисел 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21 и перед каждым из полученных произведений произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего все 54 полученных результата складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?
а) 0 и 4131, б) 0 и 4113, в) 1 и 4131, г) 1 и 4113.

5. Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 8 раз больше, либо в 8 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 2618.
1) Может ли последовательность состоять из двух элементов?
2) Может ли последовательность состоять из трёх элементов?
3) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?
а) да, нет, 581, б) нет, да, 581, в) нет, да, 518, г) да, нет, 518.

Вариант 2

1. Какое наименьшее число можно получить, расставив скобки в выражении
$\left|9^2-8^2-7^2-6^2-5^2-4^2-3^2-2^2-1^2\right|$?
а) 0, б) 1, в) 2, г) 3.

2. Каждое из чисел $a, b, c, d, e, f, g, h, k$ равно +1 или -1. Найдите наибольшее значение, которое может принимать выражение
$$aek-afh+bfg-bdk+cdh-ceg.$$
а) 4, б) 1, в) 2, г) 3.

3. Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 10 раз больше, либо в 10 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 3024.
а) Может ли последовательность состоять из двух элементов?
б) Может ли последовательность состоять из трёх элементов?
в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?
а) нет, б) да, в) 549.

4. Перед каждым из чисел 6, 7, 8, 9, 10 и 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 и произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего к каждому из образовавшихся чисел первого набора прибавляют каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 45 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?
а) 0 и 1035, б) 0 и 1036, в) 1 и 1036, г) 1 и 1035.

5. На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -3, среднее арифметическое всех положительных из них равно 4, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -8.
1) Сколько чисел написано на доске?
2) Каких чисел написано больше положительных или отрицательных?
3) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?
а) 44, положительных, 23,
б) 42, отрицательных, 19,
в) 44, отрицательных, 17,
г) 42, положительных, 22.

Свойства делимости

Вариант 1

1. На доске было написано шестизначное число, делящееся на 15 нацело. Мимо бежал Вася, стёр одну цифру, а вместо неё нарисовал *. Получилось 314*5. Какую цифру стёр Вася? а) 5, б) 6, в) 2, г) 8. Укажите ВСЕ верные утверждения.

2. Учеников повели на экскурсию. Когда их построили парами, то один ученик оказался без пары. Тогда их построили тройками, затем четвёрками, и каждый раз один ученик оставался лишним. Только когда их построили пятёрками, то лишних учеников не осталось. Сколько было учеников?

а) 50, б) 15, в) 36, г) 25. Укажите ВСЕ верные утверждения.

3. Перемножим натуральные числа от 1 до 30. Сколькими нулями оканчивается произведение? а) 7, б) 5, в) 3, г) 1. Укажите ВСЕ верные утверждения.

4. Во сколько раз увеличится двузначное число, если справа к нему приписать такое же число?

а) в 10 раз, б) в 101 раз, в) в 100 раз, г) в 99 раз. Укажите ВСЕ верные утверждения.

5. Натуральное число умножили на каждую из его цифр. Получили 1995. Найдите сумму цифр исходного числа.

а) 24, б) 12, в) 10, г) 26. Укажите ВСЕ верные утверждения.

Вариант 2

1. Какую цифру надо вставить вместо звёздочки, чтобы число 567*80 делилось на 90? а) 0, б) 1, в) 2, г) 3. Укажите ВСЕ верные утверждения.

2. Перемножим натуральные числа от 6 до 35. Сколькими нулями оканчивается произведение? а) 7, б) 5, в) 3, г) 1. Укажите ВСЕ верные утверждения.

3. Во сколько раз увеличится двузначное число, если слева к нему приписать такое же число?

а) в 10 раз, б) в 101 раз, в) в 100 раз, г) в 99 раз. Укажите ВСЕ верные утверждения.

4. Натуральное число умножили на каждую из его цифр. Получили 1950. Найдите сумму цифр исходного числа.

а) 21, б) 11, в) 15, г) 16. Укажите ВСЕ верные утверждения.

5. Какой цифрой заканчивается число $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot11\cdot12$?

а) 8, б) 4, в) 0, г) 2. Укажите ВСЕ верные утверждения.

Движение

Вариант 1

1. Человек, идя по движущемуся эскалатору, насчитал на нем 50 ступенек, а, идя в ту же сторону втрое быстрее, он насчитал 75 ступенек. Сколько ступенек он насчитал бы, идя с первоначальной скоростью по неподвижному эскалатору?

а) 70, б) 80, в) 90, г) 100.

2. Войсковая колонна имеет длину 1 км. Связной, выехав из начала колонны, передал пакет в конец колонны и вернулся обратно к началу колонны. Колонна за это время прошла 2,4 км. Какой путь проехал связной?

а) 3 км 600 м, б) 3 км 400 м, в) 3 км, г) 4 км 400 м

3. Человек, идущий по шоссе заметил, что через каждые 15 минут его обгоняет автобус, а через каждые 10 минут он встречает автобус. Считая, что автобусы идут с равными интервалами в обоих направлениях, найдите интервал времени, с которым пройдут в одну сторону два автобуса мимо неподвижного наблюдателя.

а) 15 минут, б) 14 минут, в) 12 минут, г) 10 минут.

4. Два бегуна стартовали один за другим с интервалом в 2 минуты. Второй бегун догнал первого на расстоянии 1 км от точки старта, а, пробежав от точки старта 5 км, он повернул обратно и встретился с первым бегуном. Эта встреча произошла через 20 минут после старта первого бегуна. Найдите скорость второго бегуна.

а) 10 км/час, б) 20 км/час, в) 30 км/час , г) 35 км/час.

Вариант 2

1. Из А в Б выехали одновременно Жигули, Москвич и Запорожец. Жигули, доехав до Б, повернулись назад и встретили Москвич в 18 км, а Запорожец в 25 км от Б. Москвич, доехав до Б, также повернул назад и встретил Запорожец в 8 км от Б. Найдите расстояние от А до Б. (Скорости автомобилей постоянны).

а) 50 км, б) 60 км, в) 70 км, г) 65 км.

2. Два автомобиля, двигаясь по кольцевой дороге в одном направлении, оказываются рядом каждый час. При движении с теми же скоростями в противоположных направлениях автомобили встречаются каждые полчаса. За какое время проедет всю кольцевую трассу каждый автомобиль?

а) 30 минут и 1,5 часа, б) 40 минут и 2 часа, в) 40 минут и 2,5 часа,

г) 50 минут и 2,5 часа.

3. Пассажир, едущий из А в Б, половину затраченного времени ехал на автобусе, а половину - на автомобиле. Если бы он полпути ехал на автобусе, а полпути - на автомобиле, то он потратил бы на весь путь вдвое больше времени. Найдите отношение скорости автомобиля к скорости автобуса, если известно, что автомобиль едет быстрее автобуса.

а) 3, б) $3+\sqrt{2}$, в) $2\sqrt{2}$, г) $3+2\sqrt{2}$.

4. Эскалатор метро спускает идущего вниз человека за 1 минуту. Если человек будет идти вниз вдвое быстрее, то он спустится за 45 секунд. Сколько времени спускается человек стоящий на эскалаторе?

а) 1,5 минуты, б) 4 минуты, в) 2 минуты, г) 1 минуту.

Части и проценты

Вариант 1

1. Какая из дробей больше: $\frac{11}{18}$ или $\frac{7}{20}$, $\frac{7}{6}$ или $\frac{6}{7}$?

а) $\frac{11}{18}>\frac{7}{20}$, $\frac{7}{6}<\frac{6}{7}$, б) $\frac{11}{18}<\frac{7}{20}$, $\frac{7}{6}>\frac{6}{7}$, в) $\frac{11}{18}>\frac{7}{20}$, $\frac{7}{6}>\frac{6}{7}$, г) $\frac{11}{18}<\frac{7}{20}$, $\frac{7}{6}<\frac{6}{7}$.

2. Литр воды весит 1 кг, а литр бензина $\frac{7}{10}$ кг. Что весит больше: 3 литра воды или 5 литров бензина?

а) 3 литра воды, б) 5 литров бензина, в) они весят поровну.

3. Цену картофеля повысили на 20%. Через некоторое время цену снизили на 20%. Как изменилась цена картофеля?

а) не изменилась, б) уменьшилась на 2%, в) уменьшилась на 4%.

4. Предприятие получило задание за два года снизить на 51% объём выпускаемой продукции. Каждый год требуют снижать на одно и то же число процентов. На сколько?

а) 25%, б) 30%, в) 35%, г) 40%.

5. В группе 40% ребят имеют плохое зрение. 70% из них носят очки, остальные 30% носят контактные линзы. Число ребят в очках – 21.

Какое одно из следующих утверждений верно?

а) 30 человек имеет плохое зрение,

б) 30 человек имеет хорошее зрение,

в) всего в группе 100 человек,

г) 10 человек носят линзы.

Вариант 2

1. Какая из дробей больше: $\frac{48}{49}$ или $\frac{36}{37}$, $\frac{13}{27}$ или $\frac{13}{25}$?

а) $\frac{48}{49} > \frac{36}{37}$, $\frac{13}{27} > \frac{13}{25}$, б) $\frac{48}{49} > \frac{36}{37}$, $\frac{13}{27} < \frac{13}{25}$, в) $\frac{48}{49} < \frac{36}{37}$, $\frac{13}{27} < \frac{13}{25}$,

г) $\frac{48}{49} < \frac{36}{37}$, $\frac{13}{27} > \frac{13}{25}$.

2. Литр керосина весит $\frac{4}{5}$ кг, а литр бензина $\frac{7}{10}$ кг. Что весит больше: 7 литров керосина или 8 литров бензина?

а) 7 литров керосина, б) 8 литров бензина, в) они весят поровну.

3. За весну Петя сбавил в весе 25%, за лето прибавил 20%, за осень похудел на 10%, а за зиму прибавил 20%. Похудел он или поправился за год?

а) не изменился, б) похудел, в) поправился.

4. Леспромхоз захотел вырубить сосновый лес, но экологи запротестовали. Тогда директор леспромхоза всех успокоил. Он сказал: «99% деревьев в лесу – сосны. Мы будем рубить только их, так, что после вырубки их станет 98%». Какую часть деревьев хочет вырубить леспромхоз?

а) четверть, б) треть, в) половину, г) 8-ю часть.

5. Деньги, вложенные в акции знаменитой фирмы, приносят ежемесячно 20% дохода. За сколько месяцев вложенная сумма удвоится?

а) 1, б) 2, в) 3, г) 4.

Таблица

Оценка результатов освоения программы
(итоговый контроль)

№ п/п	Критерии оценки результатов выполнения итоговой работы	Показатели	Уровень		
			недопустимый	базовый	инновационный
I.	Знание и понимание полученного на программе теоретического материала	1. Полнота усвоенных знаний. 2. Глубина понимания рассматриваемых понятий, терминов. 3. Широта использования изученных методов.	Слабое понимание рассматриваемых понятий, используемые термины представлены нечетко и неполно, недостаточное количество используемых методов.	Слушатель демонстрирует понимание материала, рассматриваемых понятий, опираясь на знания, полученные по программе, грамотно использует изученные методы.	Слушатель демонстрирует глубокое понимание материала, понятий и терминов, сопоставляет различные методы и оперирует наиболее эффективным.
II.	Обеспечение взаимосвязи теории и практики в изучаемом материале	1. Использование примеров для иллюстрации теоретических положений. 2. Обоснование практических действий положениями изученной теории.	В работе представлен только теоретический материал, отсутствует непосредственное продвижение по решению поставленных задач.	В работе отмечается разумное применение теории. Теоретические положения иллюстрируются примерами. Приведено в основном верное решение задач с некоторыми замечаниями.	Демонстрируется оптимальная взаимосвязь теоретического знания и практической деятельности, осуществляется чёткий анализ заданий, генерируется строго логичное решение.
III.	Качество представления результатов решения задач	1. Четкость, последовательность и логичность изложения материала. 2. Убедительная и грамотная аргументация приводимых положений. 3. Полнота и глубина ответов на вопросы задания.	Отсутствует четкость, логичность и последовательность в изложении текста работы. Слушатель не всегда может грамотно и убедительно аргументировать свои вычисления.	Текст работы строится четко, логично, последовательно. Слушатель демонстрирует грамотность и убедительность в аргументации положений, обоснованно отвечает на заданные ему вопросы.	Работа отличается четкой структурированностью, логичностью и последовательностью изложения. Грамотно и убедительно аргументируются практические выкладки.

Средства самоконтроля

В качестве средств организации самоконтроля выступают многообразные задания, которые предлагаются слушателям после изучения каждого раздела программы.

Задания для самоконтроля

Числовые системы

1. Решить задачу на нахождение НОД двух квадратных трёхчленов с натуральными коэффициентами.
2. Решить уравнение в натуральных или целых числах.
3. Решить систему уравнений, неизвестные которой стоят под знаком целой или дробной части числа.

Классические теоремы элементарной геометрии

1. Решить планиметрическую задачу по геометрии треугольника с применением прямой Эйлера.
2. Осуществить восстановление треугольника по заданным параметрам (высоте и двум медианам из разных вершин).
3. Решить планиметрическую задачу на применение теоремы Торричелли.

Нестандартные приемы исследования уравнений, неравенств и систем

1. Решить задачу повышенного уровня сложности ЕГЭ на применение метода оценки с отбором корней, принадлежащих заданному множеству.
2. Решить графическим методом параметрическую задачу ЕГЭ на систему уравнений.
3. Решить задачу высокого уровня сложности ЕГЭ с полиномиальными и логарифмическими функциями на использование встречной монотонности.

Классические темы дополнительного математического образования

1. Решить задачу на максимум и минимум на конечных множествах, применяя метод «оценка+пример».
2. Сформулировать теорему Эйлера о количестве вершин графа нечётной степени и решить задачу на применение данного теоретического факта.
3. Решить задачу по математической игре, применяя метод анализа с конца.

Практика решения математических задач высокого уровня сложности

1. Решить задачу на применение метода «Подсчет двумя способами».
2. Решить геометрическую задачу с неоднозначными условиями.
3. Решить задачу на последовательное конструирование процесса.

Элементы комбинаторики и теории вероятностей

1. Назовите основные виды комбинаций элементов n-элементного множества и приведите их примеры.
2. Решить задачу на вычисление количества перестановок без повторений и с повторениями.
3. Дать определение классической вероятности события и решить практическую задачу на нахождение вероятности.

Средства самооценки

В качестве средства, с помощью которого осуществляется самооценка освоения программы, выступает опрос. Слушателям предлагается оценочный лист следующего образца.

Лист самооценки

Уважаемый (ая) коллега!

Просим Вас оценить уровень своей подготовленности по итогам обучения на программе повышения квалификации, отметив знаком «+» свое мнение в соответствующей графе:

№ п/п	Я знаю				
		глубоко	в значительной мере	на должном уровне	не знаю
	Теоретические основы решения задач высокого уровня сложности				
1	основные понятия, теоремы Чевы, Стюарта, прямую Эйлера, восстановление треугольника по его элементам и приёмы решения задач				
2	основные понятия и формулы комбинаторики и теории вероятностей, приёмы решения задач				
3	основные понятия, теоретические факты, приёмы решения задач по теме «Элементы теории графов»				
4	основные понятия, теоретические факты, приёмы решения задач по теме «Теория чисел»				
5	основные понятия, теоретические факты, приёмы решения задач по теме «Теории математических игр»				
6	основные понятия, теоретические факты, приёмы решения задач по теме «Экстремальные задачи на конечных множествах»				
	Я умею				
		на высоком уровне	на должном уровне	в значительной мере	не умею
	Применять теоретические знания при решении задач высокого уровня сложности				
1	графически представлять условия задач, решать задачи аналитическими и графическими методами				
2	применять теоремы Птолемея, Торричелли, Эйлера в решении задач				
3	производить геометрическую интерпретацию понятий и теоретиче-				

	ских фактов, решать задачи по тематике модуля				
4	применять понятия «Чётность и чередование» и метод подсчета двумя способами в решении задач				
5	производить математическое моделирование практических комбинаторных и вероятностных ситуаций, решать смоделированную математическую задачу				
6	производить анализ условий математической игры, осуществлять создание выигрышной стратегии анализом с конца				
7	применять последовательное конструирование в решении задач				
	Я владею				
		владею на высоком уровне	на должном уровне	в значительной мере	не владею
	Прикладными аспектами решения задач высокого уровня сложности				
1	основными приёмами решения заданий ЕГЭ высокого уровня сложности				
2	основными приёмами решения геометрических заданий в пределах тематики модуля				
3	находить основные характеристики числовых величин: НОД, НОК и др.				
4	основными приёмами решения задач по теории чисел в пределах тематики модуля				
5	основными приёмами решения классических олимпиадных тем, представленных в программе				
6	основными приёмами решения комбинаторных задач и подсчёта вероятностей				
7	основными приёмами решения заданий ЕГЭ и классических олимпиадных тем				
	Всего «+»:				

Критерии самооценки

1. Степень сформированности полученных на программе знаний.
2. Степень сформированности полученных на программе умений.
3. Степень сформированности полученных на программе владений.

Обработка результатов самооценки

Подсчитывается количество знаков «+» в каждой из граф по разделам «Я знаю», «Я умею», «Я владею»

Если большее количество знаков слушатель набрал в графах «Я знаю глубоко», «Я умею на высоком уровне», «Я владею на высоком уровне», то результаты его обучения по программе можно отнести в целом к инновационному уроню.

Большее количество знаков, которые слушатель набрал в графах «Я знаю на должном уровне», «Я умею на должном уровне», «Я владею на должном уровне», позволяет отнести результаты его обучения по программе к базовому уровню.

Большее количество знаков, которое слушатель набрал в графах «Я знаю в значительной мере», «Я умею в значительной мере», «Я владею в значительной мере» свидетельствует о том, что результаты его обучения по программе относятся к допустимому уровню

Итоговая аттестационная работа связана с решением каждым слушателем задач по математике на материале конкретных тем, изученных в ходе освоения программы. В данной работе слушатель должен осуществить теоретически обоснованное решение задач высокого уровня сложности и представить эти решения в виде чётких, строго логичных выкладок.

Тематика заданий итоговой работы

1. Десятичное построение системы действительных чисел.
2. Натуральные, целые, рациональные, иррациональные числа. Их десятичная запись и свойства.
3. Признаки делимости, разложение на множители, НОД и НОК, простые и взаимно простые числа.
4. Решение задач по теме «Деление с остатком».
5. Основная теорема арифметики натуральных чисел.
6. Решение задач по теме «Равенство треугольников».
7. Задачи на применение «Следствий из теоремы о вписанном угле».
8. Промежутки возрастания и убывания, наибольшее и наименьшее значения, точки экстремума функции.
9. Основные приемы решения систем уравнений: подстановка, алгебраическое сложение, введение новых переменных.
10. Системы неравенств с двумя переменными.
11. Задачи высокого уровня сложности по теме «Иррациональные системы. Системы с модулями»).
12. Задачи высокого уровня сложности по теме «Четность и чередование».
13. Олимпиадные задачи по теме «Обратный ход или анализ с конца».
14. Задачи по теме «Подсчет двумя способами» - сведение на угол.
15. Задачи высокого уровня сложности по теме «Квадратный трехчлен и теорема Виета».
16. Задачи по теме «Последовательное конструирование».
17. Правила сложение и умножения в комбинаторике.
18. Комбинаторные задачи на размещения, перестановки и сочетания.
19. Комбинаторные задачи высокого уровня сложности.
20. Практика решения задач по теме «Частота и вероятность событий»

Образцы тестовых заданий для итогового контроля

Вариант 1

Неравенства в текстовых задачах

1. Маша считает, что два арбуза тяжелее трех дынь, Аня считает, что три арбуза тяжелее четырех дынь. Известно, что одна из девочек права, а другая ошибается. Кроме того,

считается, что все арбузы весят одинаково и все дыни весят одинаково. Верно ли, что 12 арбузов тяжелее 18 дынь?
а) верно, б) неверно, в) невозможно определить.

2. Грузоподъемность лифта 500 кг. На первом этаже стоит несколько человек, общей массой 2 тонны, масса каждого человека меньше 100 кг. За какое минимальное количество рейсов все могут подняться наверх независимо от масс отдельных людей?
а) 6, б) 5, в) 4, г) 3.

Простые и составные числа. Разложение на множители

3. Сколько существует натуральных чисел x, при которых значение многочлена $x^2 - 4x + 11$ будет квадратом натурального числа?
а) 0, б) 1, в) 2, г) 3.

4. Произведение трёх последовательных трёхзначных чисел делится на 20000. Какую сумму могут иметь эти числа?
а) 13, б) 14, в) 15, г) 16.

Вариант 2

Неравенства в текстовых задачах

1. Голодные Малыш и Карлсон съели торт и стали сытыми. Известно, что голодный Карлсон легче сытого Малыша, а сытый Карлсон весит в два раза больше голодного малыша. Чья масса больше: торта или голодного Малыша?
а) торта, б) голодного Малыша, в) невозможно определить.

2. Если первый автомобиль сделает 4 рейса, а второй – 3, то вместе они перевезут менее 21 тонны. Если первый автомобиль сделает 7 рейсов, а второй – 4 рейса, то вместе они перевезут более 33 тонн. Какой из автомобилей имеет большую грузоподъемность?
а) первый, б) второй, в) они одинаковой грузоподъёмности.

Простые и составные числа. Разложение на множители

3. Решите уравнение $x \cdot y = 7$ в целых числах и найдите наименьшее значение $x + y$.
а) 7, б) -7, в) -8, г) 8.

4. Какие из предлагаемых ниже чисел можно представить в виде суммы попарных произведений трёх последовательных натуральных чисел?
а) 71, б) 72, в) 74, г) здесь таких нет.

Образцы вариантов заданий итоговой работы с развёрнутым ответом по разделам программы

Вариант 1

1. Найдите трехзначное число, которое в пять раз больше произведения своих цифр.

2. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$ такой, что $AD = AB+CD$. Оказалось, что биссектриса угла A проходит через середину стороны BC. Докажите, что биссектриса угла D также проходит через середину BC.

3. Решите уравнение: $x\sqrt{y-1} + y\sqrt{x-1} = xy$.

4. На книжной полке стоит собрание сочинений из 20 томов. Сколькими различными способами их можно переставить так, чтобы: а) тома 1 и 2 стояли рядом; б) тома 4 и 5 рядом не стояли?

5. Буквы слова «апельсин» написаны на карточках и тщательно перемешаны в урне. Карточки наугад извлекаются одна за другой. Какова вероятность события: «буквы в порядке извлечения образовали слово «спаниель»?

6. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\left(\log_6(x+a)-\log_6(x-a)\right)^2-4a\left(\log_6(x+a)-\log_6(x-a)\right)+3a^2+4a-4=0$$

имеет ровно два решения.

7. Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят t^2 тыс.руб. в конце каждого года t ($t = 1, 2, \ldots$). В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счёт в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счёте будет увеличиваться в ($1+r$) раз. Пенсионный фонд хочет продать ценные бумаги в конце такого года, чтобы в конце двадцать пятого года сумма на его счёте была наибольшей. Расчёты показали, что для этого ценные бумаги необходимо продавать строго в конце двадцать первого года. При каких положительных r это возможно?

Вариант 2

1. Докажите, что число $\overline{abcabc}$ не может быть полным квадратом натурального числа.

2. Трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC такова, что угол ABD – прямой и BC + CD = AD. Найдите отношение оснований $AD : BC$.

3. Решите уравнение $\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x-x^2+1}=x^2-x+2$.

4. Учащиеся изучают 10 предметов. Сколькими способами можно составить расписание уроков на один день так, чтобы было 6 различных уроков?

5. Студент пришёл на экзамен, выучив лишь 45 из 60 экзаменационных вопросов. В каждом билете два вопроса из 60. Студент наугад взял билет. Чему равна вероятность события: «студент знает ответы на оба вопроса»?

6. Найдите все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases}(x-3)^2+(y-5)^2=16,\\ y=|x-a|+1\end{cases}$$

имеет ровно три решения.

7. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 28 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наибольший годовой платёж составит 9 млн рублей?

Вариант 3

1. Решите уравнение: $\overline{ab}+\overline{ba}=x^2$, где слева двузначные числа.

2. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC, угол B равен сумме углов A и D. На продолжении отрезка CD за вершину D отложен отрезок DK равный BC. Докажите, что отрезки AK и BK равны.

3. В таблицу 10×10 записаны числа от 1 до 100 по порядку слева направо, сверху вниз. Затем перед числами были поставлены знаки плюс и минус так, что в каждой строке и в каждом столбце их оказалось поровну. Докажите, что сумма всех чисел таблицы равна нулю.

4. В забеге участвуют 12 спортсменов. Сколько существует способов занять на финише 1-е, 2-е или 3-е место?

5. Обследование 30000 жителей во время эпидемии гриппа выявило среди них 7451 больного. Чему равна частота и приближённо вероятность события: «наугад выбранный житель болен гриппом»?

6. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\left(x+\frac{1}{x-a}\right)^2-(a+9)\left(x+\frac{1}{x-a}\right)+2a(9-a)=0$$

имеет ровно четыре решения.

7. 15-го января был выдан полугодовой кредит на развитие бизнеса. В таблице представлен график его погашения.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в процентах от кредита)	100%	90%	80%	70%	60%	50%	0%

В конце каждого месяца, начиная с января, текущий долг увеличивался на 5%, а выплаты по погашению кредита происходили в первой половине каждого месяца, начиная с февраля. На сколько процентов общая сумма выплат при таких условиях больше суммы самого кредита?

Вариант 4

1. Предпоследняя цифра квадрата натурального числа нечетна. Докажите, что его последняя цифра 6.

2. На стороне AC треугольника ABC выбрана точка D такая, что $BD = AC$. Медиана AM этого треугольника пересекает отрезок BD в точке K. Оказалось, что $DK = DC$. Докажите, что $AM + KM = AB$.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^{10}+x^2=y^5+y \\ y^6+y^2=8x^3+2x \end{cases}$.

4. Сколько различных анаграмм можно составить из слова баобаб?

5. В урне находятся 9 одинаковых шаров, пронумерованных цифрами от 1 до 9. Шары тщательно перемешиваются и по одному извлекаются из урны. Найдите вероятность события: «номера шаров извлекаются в порядке 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9».

6. Найдите все значения a, при которых любое решение уравнения

$$4\sqrt[3]{3{,}5x-2{,}5}+3\log_2(3x-1)+2a=0$$

принадлежит отрезку [1;3].

7. 1 июня 2013 года Всеволод Ярославович взял в банке 900 000 рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая – 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 1 процент на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 1%), затем Всеволод Ярославович переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Всеволод Ярославович может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 300 000 рублей?

Вариант 5

1. В каком году родился человек, если в 2001 году ему исполнилось столько лет, какова утроенная сумма цифр года его рождения?

2. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ выполнены соотношения AB = BD, $\angle ABD = \angle DBC$. На диагонали BD нашлась такая точка K, что $BK = BC$. Докажите, что $\angle KAD = \angle KCD$.

3. Можно ли все клетки таблицы 9×2002 заполнить натуральными числами так, чтобы сумма чисел в любом столбце и сумма чисел в любой строке были бы простыми числами?

4. В урне находится 10 белых и 7 чёрных шаров. Сколькими способами можно выбрать из урны 5 шаров, из которых белыми будут 3 шара?

5. Рассматриваются семьи , имеющие трёх детей, среди которых нет близнецов. Считаем, что вероятности рождения девочки или мальчика одинаковы и равны ½. Найдите вероятность события: «в семье разнополые дети».

6. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\sqrt{x^4 + (a-5)^4} = |x + a - 5| + |x - a + 5|$$

имеет единственное решение.

7. Два завода производят одинаковую продукцию. На первом заводе за суммарное время t^2 часов работы всех рабочих в неделю производится $3t$ единиц товара. На втором за такое же время – $4t$ единиц. Каждый час работы рабочего стоит 500 рублей. На оплату труда на неделю выделено 5000000 рублей. Какое наибольшее количество товара можно произвести за неделю на двух заводах при таких условиях?

Вариант 6

1. Докажите, что уравнение $x^2 - 3y^2 = 8$ не имеет решений в натуральных числах.

2. В треугольнике ABC угол C – прямой. На стороне AC нашлась точка D, а на отрезке BD – точка K такие, что $\angle ABC = \angle KAD = \angle AKD$. Докажите, что $BK = 2DC$.

3. Можно ли записать натуральные числа от 1 до 16 в строчку так, чтобы сумма любых трех подряд идущих чисел делилась на 3? А любых четырех подряд?

4. В урне находится 12 белых и 5 чёрных шаров. Сколькими способами можно выбрать из урны 4 шаров, из которых белыми будут 2 шара?

5. Студент пришёл на экзамен, выучив лишь 45 из 50 экзаменационных вопросов. В каждом билете два вопроса из 50. Студент наугад взял билет. Чему равна вероятность события: «студент знает ответы на оба вопроса»?

6. Найдите все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} y(y-7) = xy - 5(x+2), \\ x \le 6, \\ \dfrac{a(x-6)-2}{y-2} = 1 \end{cases}$$

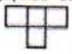
имеет единственное решение.

7. Строительство нового завода стоит 78 млн. рублей. Затраты на производство x тыс. единиц продукции на таком заводе равны $0,5x^2 + 2x + 6$ млн. рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль за один год в млн. рублей составит $px - (0,5x^2 + 2x + 6)$. Когда завод будет построен, продукция будет выпускаться в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При какой наименьшей p строительство окупится не более чем за 3 года?

Вариант 7

1. Может ли сумма квадратов двух нечетных чисел быть квадратом целого числа?

2. Дан треугольник ABC с попарно различными сторонами. На его сторонах построены внешним образом правильные треугольники ABC_1, BCA_1, CAB_1. Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ не может быть правильным.

3. В каждой клетке таблицы 50×50 записано число. Известно, что сумма чисел во всех фигурах вида  равна 4 (фигурки можно поворачивать). Докажите, что в каждой клетке таблицы записано число 1.

4. На книжной полке стоит собрание сочинений из 21 тома. Сколькими различными способами их можно переставить так, чтобы: а) тома 3 и 2 стояли рядом; б) тома 7 и 8 рядом не стояли?

5. Рассматриваются семьи, имеющие трёх детей, среди которых нет близнецов. Считаем, что вероятности рождения девочки или мальчика одинаковы и равны ½. Найдите вероятность события: «в семье однополые дети».

6. Найдите все значения a, при которых система неравенств

$$\begin{cases} ax \geq 2, \\ \sqrt{x-1} > a, \\ 3x \leq 2a + 11 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение на отрезке [3;4].

7. Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят t^2 тыс.руб. в конце каждого года t ($t = 1, 2, \ldots$). В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счёт в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счёте будет увеличиваться в ($1+r$) раз. Пенсионный фонд хочет продать ценные бумаги в конце такого года, чтобы в конце двадцать пятого года сумма на его счёте была наибольшей. Расчёты показали, что для этого ценные бумаги необходимо продавать строго в конце двадцать первого года. При каких положительных r это возможно?

Вариант 8

1. Длины сторон и диагонали прямоугольника – натуральные числа. Докажите, что величина его площади делится на 12.

2. Каждую сторону выпуклого четырехугольника продолжим в обе стороны и на всех восьми продолжениях отложим равные между собой отрезки. Оказалось, что получившиеся 8 точек – внешние концы построенных отрезков – различны и лежат на одной окружности. Докажите, что исходный четырехугольник – квадрат.

3. Найдите все целые a, при которых уравнение $x^2 + ax + a = 0$, имеет целые корни.

4. Учащиеся изучают 9 предметов. Сколькими способами можно составить расписание уроков на один день так, чтобы было 5 различных уроков?

5. Буквы слова «апельсин» написаны на карточках и тщательно перемешаны в урне. Карточки наугад извлекаются одна за другой. Какова вероятность события: «буквы в порядке извлечения образовали слово «пасинель»?

6. Найдите все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases}(x-3)(y+3x-9)=|x-3|^3, \\ y=x+a\end{cases}$$

имеет ровно четыре решения.

7. 15 января планируется взять кредит в банке на 14 месяцев. Условия его возврата таковы: 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца; со 2-го числа по 14-ое необходимо выплатить часть долга; 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15 число предыдущего месяца. Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 15% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

Вариант 9

1. Докажите, что сумма квадратов пяти последовательных натуральных чисел не является точным квадратом.

2. Биссектрисы *AD* и *CE* треугольника *ABC* пересекаются в точке *O*. Прямая, симметричная *AB* относительно *CE*, пересекает прямую, симметричную *BC* относительно *AD* в точке *K*. Докажите, что $KO \perp AC$.

3. Сколько квадратных трёхчленов с целыми коэффициентами x^2+bx+c имеет целые корни, если $b+c=30$?

4. В забеге участвуют 11 спортсменов. Сколько существует способов занять на финише 1-е, 2-е или 3-е место?

5. В урне находятся 8 одинаковых шаров, пронумерованных цифрами от 1 до 8. Шары тщательно перемешиваются и по одному извлекаются из урны. Найдите вероятность события: «номера шаров извлекаются в порядке 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8».

6. Найдите все значения a, при которых для любого действительного x выполнено неравенство

$$\left|3\sin x+a^2-22\right|+\left|7\sin x+a+12\right|\le 11\sin x+\left|a^2+a-20\right|+11.$$

7. Жанна взяла в кредит 1,2 млн. рублей на 24 месяца. В конце каждого месяца она должна возвращать часть долга. При этом сумма долга увеличивается на 2%, а затем осуществляется платёж. Суммы оплаты подбираются так, чтобы сумма долга уменьшалась равномерно на одну и ту же величину каждый месяц. Какую сумму Жанна внесёт в течение первого года кредитования?

Вариант 10

1. На параболе

а) $5x^2-11y=7$

б) $5x^2+11=2y$

найти точки с целыми координатами.

2. В параллелограмме *ABCD* точки *M* и *N* – середины сторон *BC* и *CD* соответственно. Могут ли лучи *AM* и *AN* делить угол *BAD* на три равные части?

3. Квадратный трёхчлен x^2+bx+c имеет целые корни по модулю больше 2. Докажите, что число $b+c+1$ - составное число.

4. Сколько различных анаграмм можно составить из слова геометрия?

5. Обследование 20000 жителей во время эпидемии гриппа выявило среди них 5451 больного. Чему равна частота и приближённо вероятность события: «наугад выбранный житель болен гриппом»?

6. Найдите все значения a, при которых любое решение уравнения

$$4\sqrt[3]{3,5x-2,5}+3\log_2(3x-1)+2a=0$$

принадлежит отрезку [1;3].

7. 31 декабря Андрей взял в кредит некоторую сумму под 10% годовых. Схема выплаты кредита такова: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т.е. увеличивает долг на 10%), а затем Андрей переводит в банк 3460600 рублей. Какую сумму взял Андрей, если он выплатил долг тремя равными платежами (т. е. за 3 года)?

5. **Кадровые условия (составители программы)**

NN	**Ф.И.О. преподавателя**	
1.	Саженков Александр Николаевич	канд. физ.-мат. наук, доцент, Почётный работник общего образования, председатель жюри регионального этапа Всероссийских математических олимпиад школьников, эксперт ОГЭ и ЕГЭ по математике
2	Оскорбин Дмитрий Николаевич	канд. физ.-мат. наук, доцент, член жюри регионального этапа Всероссийских математических олимпиад, эксперт ОГЭ и ЕГЭ
3	Саженкова Татьяна Владимировна	доцент кафедры математического анализа, член жюри регионального этапа Всероссийских математических олимпиад, эксперт ОГЭ и ЕГЭ
4	Пономарёв Игорь Викторович	канд. физ.-мат. наук, доцент, член жюри регионального этапа Всероссийских математических олимпиад, эксперт ОГЭ и ЕГЭ
5	Хромова Олеся Павловна	канд. физ.-мат. наук, доцент, член жюри регионального этапа Всероссийских математических олимпиад школьников
6	Дронов Сергей Вадимович	канд. физ.-мат. наук, доцент, член жюри регионального этапа Всероссийских математических олимпиад
7	Дронов Вадим Сергеевич	ст. преподаватель кафедры математического анализа, член жюри регионального этапа Всероссийских математических олимпиад школьников
8	Клепиков Павел Николаевич	преподаватель кафедры математического анализа, член жюри регионального этапа Всероссийских математических олимпиад школьников

Директор ИДПО _______________ Т.Г. Строителева
(подпись)

Директор Учебного центра по ДПО ИМИТ_______________ /О.А. Жданова/
(подпись) И.О.Ф.